

6. Числено диференциране и интегриране

6.1. Числено диференциране

Постановка на задачата

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в интервала $[a, b]$ и притежава производни от даден ред. Ако е известна таблица от стойностите $y_i = f(x_i)$ на функцията в точките (възлите) $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$, методите на численото диференциране позволяват да се намерят приближената стойност на производната $y'(x) = f'(x)$ в зададена точка x , стойността на втората производна и т.н. Особено важен момент при численото диференциране на някои функции е **възможната неустойчивост** на задачата, т.е. малки грешки в изходните данни да водят до големи грешки в резултата, а понякога и до т.н. “взрив на грешката”. Такъв случай се получава когато производните силно растат, което се познава например по големите стойности на крайните разлики. В последния пример е илюстриран такъв тип функция и е показано как може да се реши проблемът с неустойчивостта.

По-надолу ще разглеждаме само случая на равноотстоящи възли в дадения интервал $[a, b]$, за които $x_{i+1} = x_i + h$, където h е стъпката между възлите. Таблицата ще има вида:

x_i	x_0	x_1	...	x_i	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_i	...	y_n

I) Формула за числено диференциране, основана на интерполационния полином на Нютон за интерполиране напред:

$$(1) \quad y'(t) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!} \Delta^4 y_0 + \dots \right),$$

$$(2) \quad y''(t) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 + (t-1) \Delta^3 y_0 + \frac{6t^2-18t+11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right),$$

Тук $t = \frac{x-x_0}{h}$, а $\Delta^k y_0$ е крайната разлика от k -ти ред в точката x_0 .

В частност при $x = x_0$ имаме $t = 0$, откъдето получаваме

$$(3) \quad y'_0 \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \dots \right),$$

$$(4) \quad y''_0 \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right).$$

II) Формула за числено диференциране, основана на интерполационния полином на Нютон за интерполиране назад:

$$(5) \quad t = \frac{x - x_n}{h}, \quad y'(t) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_{n-1} + \frac{2t+1}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{3t^2+6t+2}{3!} \Delta^3 y_{n-3} + \dots \right)$$

$$(6) \quad y''(t) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_{n-2} + (t+1) \Delta^3 y_{n-3} + \frac{6t^2+18t+11}{12} \Delta^4 y_{n-4} + \dots \right)$$

В частност при $x = x_n$ имаме $t = 0$, откъдето получаваме

$$(7) \quad y'_n \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{1}{3} \Delta^3 y_{n-3} + \frac{1}{4} \Delta^4 y_{n-4} + \dots \right)$$

$$(8) \quad y''_n \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \frac{11}{12} \Delta^4 y_{n-4} + \dots \right).$$

III) Формули за числено диференциране по точкови шаблони при равноотстоящи възли:

№	Шаблон	Формула за числено диференциране	Локална грешка
1.	x_i, x_{i+1}	$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$	$O(h)$
2.	x_{i-1}, x_i	$y'_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$	$O(h)$
3.	x_i, x_{i+1}, x_{i+2}	$y'_i \approx \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2h}$	$O(h^2)$
4.	x_{i-2}, x_{i-1}, x_i	$y'_i \approx \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 3y_i}{2h}$	$O(h^2)$
5.	x_{i-1}, x_i, x_{i+1}	$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$	$O(h^2)$
6.	x_{i-1}, x_i, x_{i+1}	$y''_i \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+2}}{h^2}$	$O(h^2)$

Пример 1. Стойностите на функцията $y = f(x) = \ln(x^2)$ в интервала $[2,3]$ са зададени в първите две колонки на таблица 1. Да се пресметнат приближените стойности на първите производни в точките $x_0 = 2$; $x_1 = 2,1$; $x_{10} = 3$; $\xi = 2,04$.

Решение:

Пресмятаме последователно крайните разлики Δy_i , $\Delta^2 y_i$, ... В случая имаме стъпка $h = 0,1$. За първите производни като заместим във формула (3) при $x_0 = 2$ получаваме

$$y'_0 \approx \frac{1}{0,1} \left(0,09758 - \frac{1}{2}(-0,00454) + \frac{1}{3}0,00040 - \frac{1}{4}(-0,00005) + \dots \right) \approx 0,99998 .$$

Аналогично за другата точка $x_1 = 2,1$ по същата формула, но като използваме втория ред на таблицата, намираме:

$$y'_1 \approx \frac{1}{0,1} \left(0,09304 - \frac{1}{2}(-0,00414) + \frac{1}{3}0,00035 - \frac{1}{4}(-0,00004) + \dots \right) \approx 0,95236 .$$

Таблица 1

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	2,0	1,38629	0,09758	-0,00454	0,00040	-0,00005
1	2,1	1,48387	0,09304	-0,00414	0,00035	-0,00004
2	2,2	1,57691	0,08890	-0,00378	0,00031	-0,00004
3	2,3	1,66582	0,08512	-0,00348	0,00027	-0,00003
4	2,4	1,75094	0,08164	-0,00320	0,00024	-0,00003
5	2,5	1,83258	0,07844	-0,00296	0,00022	-0,00002
6	2,6	1,91102	0,07548	-0,00275	0,00019	-0,00002
7	2,7	1,98650	0,07274	-0,00255	0,00017	
8	2,8	2,05924	0,07018	-0,00238		
9	2,9	2,12942	0,06780			
10	3,0	2,19722				

За точката $\xi = 2,04$ изчисляваме $t = (\xi - x_0)/h = (2,04 - 2)/0,1 = 0,4$. От общата формула (1) получаваме:

$$y'(\xi) = y'(t) = y'(0,4) \approx \frac{1}{0,1} \left(0,09758 + \frac{0,8-1}{2}(-0,00454 + \dots) \right) \approx 0,98040 .$$

За първата производна в точката $x_{10} = 3$ прилагаме формула (7):

$$y'_{10} \approx \frac{1}{0,1} \left(0,06780 + \frac{1}{2}(-0,00238) + \frac{1}{3}0,00017 + \frac{1}{4}(-0,00002) + \dots \right) \approx 0,66667 .$$

Забележка. За сравнение изчислете точните стойности на $y'(x) = \ln(x^2)' = \frac{2}{x}$ в зададените точки.

Пример 2. С помощта на данните от таблица 1 да се пресметне приближената стойност на втората производна в точката $x_0 = 2$.

Решение:

От формулата (4) имаме:

$$y_0'' \approx \frac{1}{0,01} \left(-0,00454 - 0,00040 + \frac{11}{12}(-0,00005) + \dots \right) \approx 0,4986 .$$

Пример 3. В първите две колонки на таблица 2 са дадени стойностите на функция, получени по експериментален път. Да се пресметнат приближените стойности на производните в точките x_i .

Решение:

Имаме интервал $[1; 1,4]$ и стъпка $h=0,05$. В точката $x_0=1$ изчисляваме производната по формулата за ляв триточков шаблон – (9.3), а в точката $x_8=1,4$ – по формулата за десен триточков шаблон – (9.4). Във вътрешните точки на интервала е удобно да се използва централната разлика от формула (9.5). Резултатите са дадени в последната колонка на таблицата. Тъй като данните са с точност 0,0001, а $h=0,05$, то използваните от нас формули с локална грешка $O(h^2)$ в случая дават грешка от порядъка на 0,0025. Това означава, че последният знак в стойностите на производната може да се очаква, че не е значещ. Тъй като не знаем формулата на функцията, а следователно не можем да преценим доколко теоретичната грешка е реална, единственият признак за достоверност на резултата е плавната промяна на стойностите за y'_i , $i=0,\dots,8$.

Таблица 2

i	x_i	y_i	y'_i	i	x_i	y_i	y'_i
0	1,00	-0,2475	-0,0353	5	1,25	-0,2485	0,0270
1	1,05	-0,2490	-0,0229	6	1,30	-0,2469	0,0394
2	1,10	-0,2498	-0,0104	7	1,35	-0,2446	0,0517
3	1,15	-0,2500	0,0021	8	1,40	-0,2417	0,0639
4	1,20	-0,2496	0,0146				

Пример 4. Да се пресметнат приближените стойности на производната на функцията $y = \cos(8x)$ в точките $x_0=0$ и $x_1=0,1$.

Решение:

В този пример се срещахме със случай, показващ неустойчивостта на численото диференциране. Функцията има безброй много производни и изглежда не би трябвало

да има проблеми. Нека изберем например интервала $[0; 0,5]$ и го разделим на пет подинтервала със стъпка $h = 0,1$. Пресмятаме таблицата на крайните разлики – таблица 3. Забелязваме, че стойностите на $\Delta^k y_i$ не намаляват както в предишните примери (сравнете!).

Таблица 3

x_i	$y_i = \cos(8x_i)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0,0	1,00000	-0,30329	-0,42261	0,44032	-0,01074
0,1	0,69671	-0,72591	0,01771	0,42958	-0,27132
0,2	-0,02920	-0,70819	0,44729	0,15826	
0,3	-0,73739	-0,26090	0,60555		
0,4	-0,99829	0,34465			
0,5	-0,65364				

Като използваме първия ред крайни разлики от таблица 3 и формула (3) при $x_0 = 0$ получаваме:

$$y'_0 \approx \frac{1}{0,1} \left(-0,30329 - \frac{1}{2}(-0,42261) + \frac{1}{3}0,44032 - \frac{1}{4}(-0,01074) \right) \approx \\ \approx \frac{1}{0,1} (-0,30329 + 0,21131 + 0,14678 + 0,00269) \approx \frac{1}{0,1} 0,05748 \approx 0,5748.$$

Този резултат обаче **съществено се отличава от верния**. Наистина производната $y'(x) = -8\sin(8x)$ при $x = 0$ е $y'(0) = 0$. Така реалната грешка на численото диференциране $\varepsilon = |y'(0) - y'_0| = |0 - 0,5748| = 0,5748 \approx 0,6$ е много голяма и очевидно не се дължи на закръгляването, което е от порядъка на 10^{-5} .

Аналогичен е резултатът и в точката $x_1 = 0,1$. С данните за крайните разлики от втория ред на таблица 3 и формула (3) изчисляваме:

$$y'_1 \approx \frac{1}{0,1} \left(-0,72591 - \frac{1}{2}0,01771 + \frac{1}{3}0,42958 - \frac{1}{4}(-0,27132) \right) \approx -5,23738.$$

Точната стойност е: $y'(0,1) = -5,73885$. Грешката и в този случай е много голяма – 0,50147.

Забележка. За експериментални данни, за които не знаем формулата на функцията, единственият критерий за устойчивост е поведението на крайните разлики. За решаване на проблема и намиране на удовлетворителни приближени стойности на

производните на неустойчиви задачи може да се използва много малка стъпка h .

Опитайте да приложите това предписание като изберете $h=0,0001$ и изчислите y'_0 .

Пример 5. Като се използват формули за числено диференциране с грешка $O(h^2)$ да се попълнят празните полета в таблицата:

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	-4		1	11	20
y'	35				
y''					

Решение:

За да изчислим стойността $y(0,2)$ ще използваме формула (9-3.) за $y'(0,1)$:

$$y'_i \approx \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2h} \Rightarrow y'(0,1) \approx \frac{-3y(0,1) + 4y(0,2) - y(0,3)}{2h} \Rightarrow$$

$$y(0,2) = \frac{2hy'(0,1) + 3y(0,1) + y(0,3)}{4} = \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 35 + 3(-4) + 1}{4} = -1.$$

Тогава пак от формули (9) намираме:

$$y'(0,2) = \frac{y(0,3) - y(0,1)}{2h} = \frac{1 + 4}{2 \cdot 0,1} = 25; \quad y'(0,3) = \frac{y(0,4) - y(0,2)}{2h} = \frac{11 + 1}{2 \cdot 0,1} = 60;$$

$$y'(0,4) = \frac{y(0,5) - y(0,3)}{2h} = \frac{20 - 1}{2 \cdot 0,1} = 95; \quad y'(0,5) = \frac{y(0,3) - 4y(0,4) + y(0,5)}{2h} = \frac{1 - 44 + 60}{2 \cdot 0,1} = 85;$$

За вторите производни съответно имаме:

$$y''(0,2) = \frac{y(0,3) - 2y(0,2) + y(0,1)}{h^2} = \frac{1 - 2(-1) - 4}{0,01} = -100;$$

$$y''(0,3) = \frac{y(0,4) - 2y(0,3) + y(0,2)}{h^2} = \frac{11 - 2 \cdot 1 + (-1)}{0,01} = 800;$$

$$y''(0,4) = \frac{y(0,5) - 2y(0,4) + y(0,3)}{h^2} = \frac{20 - 2 \cdot 11 + 1}{0,01} = -100.$$

Задачи за упражнения

- 1) Като използвате данните от пример 1, намерете: y'_2, y'_3, y'_9 по формулите от I-ви или II-ри вид.
Отговор: $y'_2 = 0,90908, y'_3 = 0,86955, y'_9 = 0,68965$.
- 2) За функцията от пример 1 намерете приближено първите производни като използвате триточкови шаблони. Сравнете съответните резултати, получени по другите методи.
- 3) По данните от пример 3 изчислете производните по методи I и II. Сравнете резултатите.
- 4) Съставете таблица на функцията $f = \frac{x^3 + 2x - 1}{x + 2}$ в интервала $[-1; 0]$ със стъпка $h = 0,1$ и попълнете таблицата на крайните разлики. С нейна помощ изчислете приближените стойности на първите производни на функцията в точките $x_0 = -1, x_1 = -0,9$ и $x_{10} = 0$. Внимавайте с устойчивостта. Сравнете с точното решение.
Отговор: $f'_0 = 8,987, f'_1 = 6,934, f'_{10} = 1,249$.
- 5) Съставете таблица на функцията $f = \frac{4x - 1}{x^2 + 1}$ в интервала $[5, 6]$ със стъпка $h = 0,2$ и попълнете таблицата на крайните разлики. С нейна помощ изчислете приближените стойности на първите производни на функцията в точките $x = 5,05; x = 5,9$. Сравнете с точните стойности, които са: $f'(5,05) = 0,12516$ и $f'(5,9) = -0,09626$.
- 6) Изчислете приближените значения на производната на функцията $f = \sqrt{x^2 - x + 3}$ в точката $x = 1$. Изберете подходяща формула и стъпка така, че да имате теоретична грешка $\varepsilon = 0,001$.
Отговор: $f'_0 = 0,288, h = 0,2$.
- 7) Съставете таблица на функцията $f = \sin(x + \pi/7)$ като разделите интервала $[0, \pi/6]$ на пет равни подинтервала. Изчислете приближените стойности на първите и

вторите производни на функцията в граничните точки. Определете грешката на приближението.

- 8) Изчислете първите и вторите производни на функцията от пример 7) във всички точки, като използвате подходящи триточкови шаблони. Каква е теоретичната грешка?
- 9) Като се използват формули за числено диференциране с грешка $O(h^2)$ да се попълнят празните полета в таблицата

x	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	31	44	59		95
y'					
y''			200		

Упътване. Използвайте формулата за централната разлика за $y''(0,8)$ за да намерите стойността на $y(0,9)$, след което можете да следвате пример 5. Как ще решите задачата, ако $y''(0,8)$ не е известна?